УДК 519.876.2:611.018.4

О.М. Кучвара
ДВНЗ «Тернопільський державний медичний університет імені І.Я. Горбачевського»
Україна, 46001, м. Тернопіль, майдан Волі, 1, koleksandra@i.ua

Про стійкість у моделях математичної епідеміології на основі функцій Ляпунова-Вольтера

A.M. Kuchvara
I.Ya. Horbachevsky Ternopil State Medical University
Ukraine, 46001, Ternopil, Str. m Voli, 1, koleksandra@i.ua

On Stability in Models of Mathematical Epidemiology Based on Lyapunov-Volterra Function

А.М. Кучвара
Тернопольский государственный медицинский университет им. И.Я. Горбачевского
Украина, 46001, г. Тернополь, площадь Воли, 1, koleksandra@i.ua

Об устойчивости в моделях математической эпидемиологии на основе функций Ляпунова-Вольтера

Робота присвячена побудові функцій Ляпунова-Вольтера в задачах математичної епідеміології. Розглядаються моделі SIR, SIAR та модель співіснування двох штамів вірусу.
Ключові слова:математична епідеміологія, SIR-модель, функція Ляпунова-Вольтера.

The work is devoted to the construction of Lyapunov-Volterra functions in problems of mathematical epidemiology. The models SIR, SIAR and model of coexistence of two strains of the virus are considered.
Key words: mathematical epidemiology, SIR-model, Lyapunov-Volterra function.

Работа посвящена построению функций Ляпунова-Вольтера в задачах математической эпидемиологии. Рассматриваются модели SIR, SIAR и модель сосуществования двух штаммов вируса.
Ключевые слова: математическая эпидемиология, SIR-модель, функция Ляпунова-Вольтера.

Другий метод Ляпунова є одним із найконструктивніших підходів до дослідження стійкості динамічних систем. Перевагою методу є те, що в певних випадках систем (наприклад, лінійних) вдається отримати не лише достатні, але й необхідні умови стійкості.

У той же час проблемою залишається конструктивна побудова функцій Ляпунова та отримання умов стійкості для конкретних динамічних систем.

Одним із важливих застосувань є задачі математичної епідеміології на основі SIR-моделювання. Слід зазначити, що проблеми стійкості таких систем вивчаються в роботі [1]. При цьому традиційно використовується підхід дослідження стійкості за першим наближенням. Отримані умови стійкості при цьому виражаються в термінах показника відтворюваності.

Метою даної роботи є розробка підходу отримання достатніх умов стійкості на основі функції Ляпунова-Вольтера. Перевагою такого підходу є врахування нелінійного характеру моделі.

Найдавнішу історію в моделях популяційної динаміки має функція Ляпунова «типу Вольтера»:

$$V = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_i - \bar{x} \ln x_i \right).$$

Дана функція застосовується в моделях Лотки-Вольтера [2-5] і вперше була запропонована самим Вольтером, хоч і він не вживав термін «функція Ляпунова».

Функція Ляпунова-Вольтера почала активно впроваджуватися в епідеміологічних моделях, починаючи з 1980-х років.

Завдяки роботі [6] функції Ляпунова-Вольтера почали використовуватися для вивчення стійкості у багатовимірних системах, що ґрунтуються на законі дії мас. Складністю залишається вибір коефіцієнтів, що гарантують від'ємновираженість похідної [7]. В даній роботі розвивається загальний метод вибору коефіцієнтів функції Ляпунова-Вольтера, що ґрунтується на нерівності між середнім арифметичним і геометричним.

Функція Ляпунова в SIR-моделі.

Розглянемо SIR-модель, представлену діаграмою рис. 1.

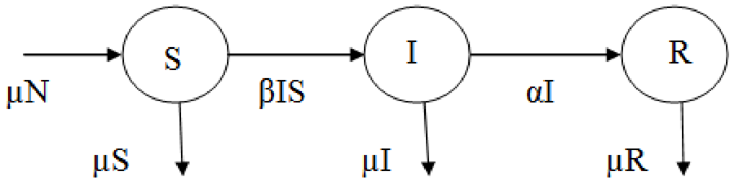


Рисунок 1 – Функція Ляпунова в SIR-моделі

Модель задається такою системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} S' &= \mu(N - S) - \beta IS, \\ I' &= \beta IS - (\mu + \alpha) I, \\ R' &= \alpha I - \mu R. \end{aligned} \qquad (1)$$

Із загальної теорії відомо, що існує єдиний ендемічний стан рівноваги, що задовольняє ендемічні співвідношення:

$$\begin{aligned} \mu N &= \mu S^* + \beta I^* S^*, \\ \beta I^* S^* &= (\mu + \alpha) I^*, \\ \alpha I^* &= \mu R^*. \end{aligned} \qquad (2)$$

Розглянемо функцію, що претендує бути функцією Ляпунова:

$$V_{EE} = \left(S - S^* \ln S \right) + d \left(I - I^* \ln I \right),$$

де $d > 0$ – поки що невідома стала.

Її похідна на траєкторіях (1) має вигляд:

$$V'_{EE} = \left[\mu(N - S) - \beta IS - \mu N \frac{S^*}{S} + \mu S^* + \beta IS^* \right] +$$
$$+ d \left[\beta IS - (\mu + \alpha) I - \beta I^* S + (\mu + \alpha) I^* \right].$$

Використовуючи ендемічні співвідношення (2), маємо:

$$V'_{EE}=\left[\mu S^*+\beta I^* S^*-\mu S^*\frac{S}{S^*}-\left(\mu S^*+\beta I^* S^*\right)\frac{S^*}{S}+\mu S^*+\beta I S^*\right]+$$

$$+(d-1)\beta IS+d\left[-(\mu+\alpha)I-\beta I^* S+\beta I^* S^*\right]=\mu S^*\left[2-\frac{S^*}{S}-\frac{S}{S^*}\right]+$$

$$+\beta I^* S^*\left[(1+d)-\frac{S^*}{S}-d\frac{S}{S^*}\right]+(d-1)\beta IS+I\left(\beta S^*-d(\mu+\alpha)\right).$$

З другої рівності в (2) бачимо, що

$$\beta S^*=(\mu+\alpha).$$

Отже, поклавши d=1 і використавши нерівність між середніми арифметичними і геометричними бачимо, що V'_{EE} є від'ємною, тобто $V'_{EE}\le 0$.

Розглянемо SIAR-модель, представлену діаграмою рис. 2.

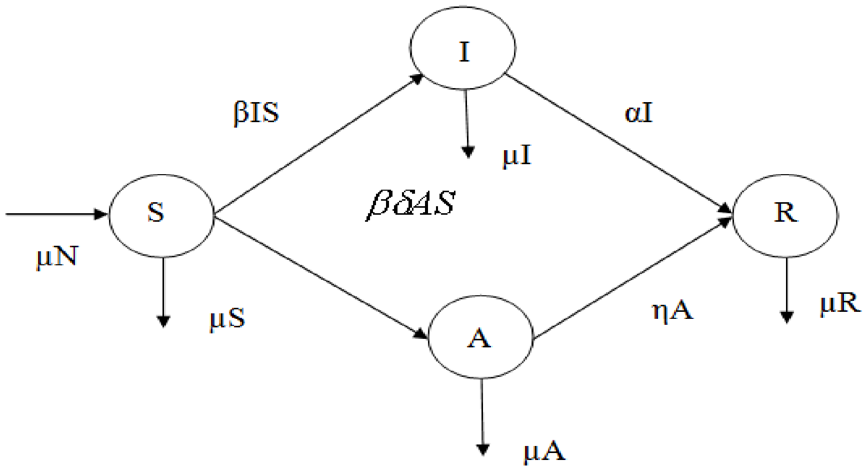


Рисунок 2 – SIAR-модель

На її основі розглядається система диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} S'&=\mu(N-S)-\beta(I+\delta A)S,\\ I'&=\beta IS-(\mu+\alpha)I,\\ A'&=\beta\delta AS-(\mu+\eta)A,\\ R'&=\alpha I+\eta A-\mu R. \end{aligned} \qquad (3)$$

Ендемічний стан рівноваги визначається ендемічними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \mu N&=\mu S^*+\beta\left(I^*+\delta A^*\right)S^*,\\ \beta I^* S^*&=(\mu+\alpha)I^*,\\ \beta\delta A^* S^*&=(\mu+\eta)A^*,\\ \alpha I^*+\eta A^*&=\mu R^*. \end{aligned} \qquad (4)$$

Розглянемо функцію-претендент та функцію Ляпунова:

$$V_{EE}=\left(S-S^*\ln S\right)+\left(I-I^*\ln I\right)+d\left(A-A^*\ln A\right),$$

де d >0 – невідома система.

Її похідна та траєкторія (3) має вигляд:

$$V'_{EE} = \left[\mu(N - S) - \beta(I + \delta A)S - \mu N \frac{S^*}{S} + \mu S^* + \beta(I + \delta A)S^* \right] +$$

$$+ \left[\beta IS - (\mu + \alpha)I - \beta I^* S + (\mu + \alpha)I^* \right] + d\left[\beta\delta AS - (\mu + \eta)A - \beta\delta A^* S + (\mu + \eta)A^* \right].$$

Використовуючи ендемічні співвідношення (4) маємо:

$$V'_{EE} = \left[\mu S^* + \beta\left(I^* + \delta A^*\right)S^* - \mu S^* \frac{S}{S^*} - \beta(I + \delta A)S - \right.$$

$$- \left(\mu S^* + \beta\left(I^* + \delta A^*\right)S^*\right)\frac{S^*}{S} + \mu S^* + \beta(I + \delta A)S^* \Big] +$$

$$+ \left[\beta IS - (\mu + \alpha)I - \beta I^* S^* \frac{S}{S^*} + \beta I^* S^* \right] +$$

$$+ d\left[\beta\delta AS - (\mu + \eta)A - \beta\delta A^* S \frac{S}{S^*} + \beta\delta A^* S^* \right] = \mu S^* \left[2 - \frac{S}{S^*} - \frac{S^*}{S} \right] +$$

$$+ \beta I^* S^* \left[2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} \right] + \beta\delta A^* S^* \left[(1 + d) - \frac{S^*}{S} - d\frac{S}{S^*} \right] - \beta\delta S(1 - d)A +$$

$$+ A\left(\beta\delta S^* - d(\mu + \eta)\right).$$

З другої рівності в (4) бачимо, що $\beta S^* = \mu + \alpha$, а з третьої рівності в (4)

$$\beta\delta S^* = \mu + \eta .$$

Отже, поклавши d = 1 і використавши нерівність між середніми арифметичними і геометричними бачимо, що V'_{EE} є від'ємно визначеною, тобто $V'_{EE} \le 0$.

Функція Ляпунова в моделі співіснування двох штамів вірусу.

$$S' = \mu(N - S) - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S,$$

$$I'_i = \beta_i S I_i - (\mu + \alpha_i)I_i,$$

$$R'_i = \alpha_i I_i - \left(\mu + \theta_j \beta_j I_j\right)R_i,$$

$$Y'_i = \theta_i \beta_i R_j I_i - (\mu + \alpha_i)Y_i,$$

тут $i, j = 1,2, i \ne j.$

Із загальної теорії ми знаємо, що існує єдиний ендемічний стан рівноваги, який задовольняє рівняння:

$$\begin{cases} \mu N = \mu S^* + \left(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*\right)S^*, \\ \beta_i S^* I_i^* = (\mu + \alpha_i)I_i^*, \\ \alpha_i I_i^* = \left(\mu + \theta_j \beta_j I_j^*\right)R_i^*, \\ \theta_i \beta_i R_j^* I_i^* = (\mu + \alpha_i)Y_i^*, \end{cases} \tag{5}$$

тут $i, j = 1,2, i \ne j.$

Розглянемо функцію Ляпунова:

$$V_{EE} = \left(S - S^* \ln S\right) + \sum_{i=1}^{2}\left(I_i - I_i^* \ln I_i\right) + \sum_{i=1}^{2}\left(R_i - R_i^* \ln R_i\right) + \sum_{i=1}^{2} d_i\left(Y_i - Y_i^* \ln Y_i\right).$$

Її похідна вздовж траєкторій має вигляд:

$$\dot{V}_{EE} = \left[\mu(N-S) - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \frac{S^*}{S}\mu N + \mu S^* + \beta_1 I_1 S^* + \beta_2 I_2 S^*\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\left[\beta_i S I_i - (\mu+\alpha_i)I_i - \beta_i I_i^* S + (\mu+\alpha_i)I_i^*\right] +$$
$$+\sum_{i=1, i\neq j}^{2}\left[\alpha_i I_i - (\mu + \theta_j\beta_j I_j)R_i - \frac{\alpha_i R_i^* I_i}{R_i} + (\mu+\theta_j\beta_j I_j)R_i^*\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{2} d_i\left[\theta_i\beta_i R_j I_i - (\mu+\alpha_i)Y_i - \frac{Y_i^*}{Y_i}\theta_i\beta_i R_j I_i + (\mu+\alpha_i)Y_i^*\right].$$

Використовуючи ендемічні співвідношення (5) маємо:

$$\dot{V}_{EE} = \left[\left(\mu S^* + (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^*\right) - \mu S - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S -\right.$$
$$\left. - \frac{S^*}{S}\left(\mu S^* + (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*)S^*\right) + \mu S^* + \beta_1 I_1 S^* + \beta_2 I_2 S^*\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\left[\beta_i S I_i - (\mu+\alpha_i)I_i^*\frac{I_i}{I_i^*} - \beta_i I_i^* S^* \frac{S}{S^*} + (\mu+\alpha_i)I_i^*\right] +$$
$$+\sum_{i=1, i\neq j}^{2}\left[\alpha_i I_i^*\frac{I_i}{I_i^*} - \left(\mu R_i^* + \theta_j\beta_j\frac{I_j}{I_j^*}I_j^* R_i^*\right)\frac{R_i}{R_i^*} - \alpha_i I_i^*\frac{R_i^*}{R_i}\frac{I_i}{I_i^*} + \left(\mu + \theta_j\beta_j\frac{I_j}{I_j^*}I_j^*\right)R_i^*\right] +$$
$$\sum_{i=1}^{2} d_i\left[\theta_i\beta_i R_j^* I_i^*\frac{R_j}{R_j^*}\frac{I_i}{I_i^*} - (\mu+\alpha_i)Y_i^*\frac{Y_i}{Y_i^*} - \frac{Y_i^*}{Y_i}\theta_i\beta_i R_j^* I_i^*\frac{R_j}{R_j^*}\frac{I_i}{I_i^*} + (\mu+\alpha_i)Y_i^*\right].$$

де $(\mu+\alpha_i)I_i^* = \beta_i S^* I_i^*$,

$$\alpha_i I_i^*\frac{R_i^*}{R_i}\frac{I_i}{I_i^*} = (\mu + \theta_j\beta_j I_i^*)R_i^*,$$

$$(\mu+\alpha_i)Y_i^*\frac{Y_i}{Y_i^*} = \theta_i\beta_i R_j^* I_i^*,$$

$$(\mu+\alpha_i)Y_i^* = \theta_i\beta_i R_j^* I_i^*.$$

Тобто:

$$\dot{V}_{EE} = \mu S^*\left[1 - \frac{S}{S^*} - \frac{S^*}{S} + 1\right] + \sum_{i=1}^{2}\beta_i I_i^* S^*\left[1 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} + 1\right] +$$
$$+\sum_{i=1, i\neq j}^{2}\theta_j\beta_j I_j^* R_i^*\left[-\frac{R_i}{R_i^*}\frac{I_j}{I_j^*} + \frac{I_j}{I_j^*} + \alpha_j\frac{R_i}{R_i^*}\frac{I_j}{I_j^*} - d_j\frac{Y_j^*}{Y_j}\frac{R_i}{R_i^*}\frac{I_j}{I_j^*}\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{2} I_i\left(\beta_i S^* - (\mu+\alpha_i) + \alpha_i\right) - \sum_{i=1}^{2}\alpha_i I_i^*\frac{R_i^*}{R_i}\frac{I_i}{I_i^*} -$$
$$-\sum_{i=1}^{2} d_i\left[(\mu+\alpha_i)Y_i^*\frac{Y_i}{Y_i^*} - (\mu+\alpha_i)Y_i^*\right].$$

Враховуючи третє і четверте ендемічні співвідношення (5) маємо:

$$\dot{V}_{EE} = \mu S^*\left[2 - \frac{S}{S^*} - \frac{S^*}{S}\right] + \sum_{i=1}^{2}\beta_i I_i^* S^*\left[2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1, i\neq j}^{2}\theta_j\beta_j I_j^* R_i^*\left[-\frac{R_0}{R_i^*}\frac{I_j}{I_j^*} + \frac{I_j}{I_j^*} + d_j\frac{R_i}{R_i^*}\frac{I_j}{I_j^*} - d_j\frac{Y_j^*}{Y_j}\frac{R_i}{R_i^*}\frac{I_j}{I_j^*} - \left(\frac{\mu}{\theta_j\beta_j I_j^*} + 1\right)\frac{R_i^*}{R_i}\frac{I_i}{I_i^*} - d_j\frac{Y_j}{Y_j^*} + d_j\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} I_i\left(\beta_i S^* - \mu\right).$$

Отже, в роботі вивчаються питання застосування другого методу Ляпунова до вивчення стійкості епідеміологічних моделей. Апробовано метод обґрунтування від'ємної визначеності похідної функції Ляпунова-Вольтера з використанням нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним.

Список літератури

1. Марценюк В.П. Об условиях асимптотической устойчивости в SIR моделях математической епидемиологии / В.П. Марценюк, А.М. Кучвара, И.Е. Андрущак // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 6. – С. 125-133.
2. Beretta E. Global stability of lotka-volterra diffusion models with continuous time delay / E. Beretta and Y. Takeuchi // SIAM. – 1988, J. Appl., Math. – № 48. – P. 627-651.
3. Goh B.S. Global stability in many-species systems/ B.S. Goh // Amer. Naturalist. – 1977. – P. 135-143.
4. Harrison G.W. Global stability of predator-prey interactions / G.W. Harrison // J. Math. Biol. – 1979. – № 8. – P. 159-171.
5. Takeuchi Y. The existence of globally stable eduilibria of ecosystems of the generalized volterra type / Y. Takeuchi and N. Adachi // J. Math. Biol. – 1980. – P. 401-415.
6. Korobeinikov A. A Lyapunov function and global properties for SIR and SEIR epidemiological models with nonlinear incidence / A. Korobeinikov and P.K. Maini // Mathematical Biosciences and Engineering. – 2004. – № 1 (1). – P. 57-60.
7. Fall A. Epidemiological Models and Lyapunov Functions / A. Fall // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2007. – Vol. 2, № 1. – P. 55-73.
8. Longini I.M. Containing pandemic influenza with antiviral agents / [I.M. Longini, M.E. Halloran, A. Nizam & Y. Yang] // Am. J. Epidem. – 2004. – № 159. – P. 623-633.

References

1. Martsenyuk V.P. On conditions of asymptotic stability in SIR-models of mathematical epidemiology / V.P. Martsenyuk, I.Ye. Andrushchak, O.M. Kuchvara // Journal of Automation and Information Sciences. – 2011. – № 6. – P. 125-133.
2. Beretta E. Global stability of lotka-volterra diffusion models with continuous time delay / E. Beretta and Y. Takeuchi // SIAM. – 1988, J. Appl., Math. – № 48. – P. 627-651.
3. Goh B.S. Global stability in many-species systems/ B.S. Goh // Amer. Naturalist. – 1977. – P. 135-143.
4. Harrison G.W. Global stability of predator-prey interactions / G.W. Harrison // J. Math. Biol. – 1979. – № 8. – P. 159-171.
5. Takeuchi Y. The existence of globally stable eduilibria of ecosystems of the generalized volterra type / Y. Takeuchi and N. Adachi // J. Math. Biol. – 1980. – P. 401-415.
6. Korobeinikov A. A Lyapunov function and global properties for SIR and SEIR epidemiological models with nonlinear incidence / A. Korobeinikov and P.K. Maini // Mathematical Biosciences and Engineering. – 2004. – № 1 (1). – P. 57-60.
7. Fall A. Epidemiological Models and Lyapunov Functions / A. Fall // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2007. – Vol. 2, № 1. – P. 55-73.
8. Longini I.M. Containing pandemic influenza with antiviral agents / [I.M. Longini, M.E. Halloran, A. Nizam & Y. Yang] // Am. J. Epidem. – 2004. – № 159. – P. 623-633.

RESUME

A.M. Kuchvara

On Stability in Models of Mathematical Epidemiology Based on Lyapunov-Volterra Function

In given article deals with the second method of Lyapunov. It is one of the most constructive approaches to study the stability of dynamical systems. The advantage of this method is that in some cases of systems we can get not only sufficient but also necessary conditions of stability. The investigative approach of stability of the first approximation is used. These stability conditions thus expressed in terms of the rate of reproducibility.

One important application is the problem of mathematical epidemiology based on SIR- modeling. It should be noted that the problem of stability of such systems are studied in this research by a constructive method of study of negative definiteness of the derivative of the Lyapunov-Volterra function, using the inequality between the arithmetic mean and the geometric mean. The paper is devoted to the construction of Lyapunov-Volterra functions in problems of mathematical epidemiology. The models SIR, SIAR and model of coexistence of two strains of the virus are examined. The aim of this research is to develop an approach of obtaining sufficient conditions for stability based on Lyapunov-Volterra function. The advantage of this approach is the incorporation of non-linear models.

We study the question of application of the second Lyapunov method to study the stability of epidemiological models. Aprobuyetsya The method of study of negative definiteness of the derivative of the Lyapunov-Volterra function using the inequality between the arithmetic mean and the geometric mean is tested.

Стаття надійшла до редакції 23.12.2013.